REPUBLIQUE GABONAISE

DIRECTION DU BACCALAUREAT

Session: 2017
Séries: D
Coef.: 4
Durée: 4 heures

BACCALAUREAT DE L'ENSEIGNEMENT GENERAL
SESSION 2017

MATHEMATIQUES
(L'usage de la calculatrice est autorisé)

Exercice 1 : (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM) composé de cinq questions indépendantes. Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie. Chaque réponse exacte rapporte un point. Aucune justification n'est demandée. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

1. On considère l'équation différentielle (E) : $ay'' + by' + cy = 0$. (a , b et c étant des nombres réels avec a non nul).
Si l'équation caractéristique de (E) a des solutions complexes de la forme $\alpha + i\beta$, alors les solutions de (E) sont les fonctions h de la variable réelle x telles que :

$a)$ $h(x) = k_1 e^{\alpha x} + k_2 e^{\beta x}$
$b)$ $h(x) = (k_1 x + k_2)e^{\alpha x}$
$c)$ $h(x) = e^{\alpha x}(k_1 cos\beta x + k_2 sin\beta x)$
$d)$ Aucune des réponses proposées n'est exacte.

2. Soient A, B et C trois points non alignés de l'espace E. L'ensemble des points M de l'espace tel que $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AM} = 0$ est :
$a)$ La droite passant par A et perpendiculaire à (AB) ;
$b)$ La droite (AB) ;
$c)$ Le plan (ABC);
$d)$ Aucune des réponses proposées n'est juste.

3. Soit Ω un univers, p est une probabilité sur l'ensemble des parties de Ω. Soit A et B deux évènements tels que : $p(B) = \frac{1}{3}$ et $p(A/B) = \frac{3}{8}$. Donc $p(A \cap B) =$

$a)$ $\frac{1}{8}$
$b)$ $\frac{3}{40}$
$c)$ $\frac{8}{9}$
$d)$ Aucune des réponses proposées n'est exacte.

4. Soit (v_n) une suite telle que pour tout entier naturel n: $v_{n+1} = 2v_n$ et $v_0 = 2$.
La somme $v_0 + v_1 + v_2 ... + v_{19}$ est égale à :

$a)$ 1 048 575
$b)$ 2 097 150
$c)$ 1 048 574
$d)$ Aucune des réponses proposées n'est exacte.

5. on considère le système (S) : $\begin{cases} x + y = 7 \\ lnx + lny = ln10 \end{cases}$.
L'ensemble solution du système est :

$a)\{(1;6);\ (6;1)\}$
$b)\{(3;4);\ (4;3)\}$
$c)$ $\{(2;5);\ (5;2)\}$;
$d)$ Aucune des réponses proposées n'est exacte.

Exercice 2 : (5 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$
1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 5(1+i)z + 2 + 11i = 0$.
2. on considère les points A , B et C d'affixes respectives $2+i$; $3+4i$ et $1-2i$.
Soit g l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = (1+i)z + 2 + i$.

a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de g ;
b) Démontrer que pour tout point M distinct de C, le triangle CMM' est isocèle rectangle en M.

3. Pour tout entier naturel n, on pose : $M_{n+1} = g(M_n)$ et $M_0 = O$.
a) Déterminer $g(M_O)$ et $g(M_1)$
b) En justifiant la démarche, construire les points M_3 , M_4 et M_5.

Problème : (10 points)

Le but de ce problème est de calculer une aire tout en tenant compte des points singuliers de la courbe.

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 + x - 2xlnx$.
1. Etudier les variations de g', puis celles de g ; g' désignant la fonction dérivée de g.
2. Dresser le tableau de variations de g, en le complétant avec les limites en 0 et en $+\infty$.
3. Expliquer pourquoi la fonction g est positive sur $]0; +\infty[$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x + lnx - (lnx)^2$.
(C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité : $2cm$).

1. Calculer la limite de f en $+\infty$ et en 0. Interpréter si possible les résultats.
2. Soit f' la fonction dérivée de f. Démontrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$:
$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}.$$
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Déterminer une équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse 1.
5. Démontrer qu'il existe un unique réel α de l'intervalle $[0,6 ; 0,7]$ solution de l'équation $f(x) = 0$?
6. Construire (C_f) .
7. Soit $\mathcal{A}$ l'aire, en cm^2, de la partie délimitée par (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 1$.
Démontrer que : $\mathcal{A} = -8\alpha\ln\alpha + 2\alpha^2 + 12\alpha - 10$.